

文章编号:1000-8055(2012)10-2371-07

一种新的边界处理方法在笛卡尔网格中的应用

韩玉琪, 江立军, 张常贤, 高 歌

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院

航空发动机气动热力国家级重点实验室, 北京 100191)

摘 要: 采用自适应笛卡尔网格方法求解 Euler 方程, 固壁边界条件通过一种离散强迫浸入边界方法引入, 边界切割网格与流场网格保持一致, 从而有效解决了小切割网格单元的时间步长限制问题. 针对自适应笛卡尔网格的特点提出了新的虚拟点反射方法和插值方法, 解决了数值吸力峰值问题. 对 RAE2822 翼型、双 NACA0012 翼型和 Suddhoo 三元翼型的流动状况进行了无黏数值模拟, 并与现有的理论解、单域以及分区结构网格解进行了对比. 结果表明: 该离散强迫浸入边界方法有效地引进了固壁边界条件, 结合自适应笛卡尔网格技术能够准确模拟复杂几何外形下的流动状况.

关 键 词: 离散强迫; 浸入边界; 自适应; 笛卡尔网格; 翼型

中图分类号: V211.3

文献标志码: A

Application of new boundary method in Cartesian-mesh

HAN Yu-qi, JIANG Li-jun, ZHANG Chang-xian, GAO Ge

(National Key Laboratory of Science and Technology on Aero-Engine

Aero-thermodynamics, School of Jet Propulsion,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100091, China)

Abstract: Adaptively-refined Cartesian-mesh approaches were employed for the computation of Euler equations, solid wall boundary was introduced by a discrete forcing immersed boundary approach, and shape of cut cell kept in accordance with that in the flow field, which efficiently relieved the time step restriction of small cut cell. To remedy the numerical suction peak, a novel method for reflection of ghost point along with interpolation scheme were devised which were applied for adaptively-refined Cartesian-mesh. Inviscid flows around RAE 2822 airfoil, double NACA0012 airfoil and Suddhoo three-element airfoil were simulated and compared with published theoretical and single/multi domain structured mesh results. The results show that solid wall is efficiently resolved by the current discrete forcing immersed boundary approach and flows around complex geometries are adequately simulated by adaptively-refined Cartesian-mesh approaches.

Key words: discrete forcing; immersed boundary; adaptively-refined; Cartesian-mesh; airfoil

传统的结构网格方法由于采用了贴体网格的方式, 固壁处的边界条件可以得到方便准确的表述, 同时还可以保持求解器在流场其他区域的精

确性和守恒性, 然而对于稍微复杂的几何区域, 分区结构网格的生成以及网格质量的保持都存在着巨大的困难, 需要耗费大量的人工时间. 非结构网

收稿日期: 2012-04-10

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20121015.1020.201210.2371_029.html

作者简介: 韩玉琪(1987—), 男, 河南洛阳人, 博士生, 主要从事自适应笛卡尔网格生成技术研究.

格技术能够非常方便的生成复杂外形的网格,但是该方法数据结构复杂,线迭代和几何多重网格加速收敛技术也不适用.笛卡尔网格技术既可以在复杂几何区域自动生成高质量的网格,又能够方便地补充结构网格中使用的线迭代和几何多重网格加速收敛技术,但是由于在壁面处采用了非贴体网格的方式,准确的引入固壁边界条件对于该方法来说是至关重要的.

浸入式边界方法由 Peskin^[1]于 1972 年提出并用于对心脏中的血液流动问题进行数值模拟. Beyer^[2], Saiki 和 Biringen^[3]通过使用不同的分布函数进一步发展了该方法,但他们采用的连续强迫方法对于弹性边界有较好的结果,用于刚性边界时固壁表述不够准确而且会带来稳定性问题. Mohd-Yosuf^[4], Ghias, Mittal 和 Dong^[5], Dadone 和 Grossman^[6]发展了离散强迫浸入式边界方法,其中, Dadone 和 Grossman 通过在边界处假设涡流模型来满足法向动量方程和无穿透条件,同时由于考虑了壁面曲率的影响,该方法具有空间 2 阶精度.

本文采用自适应笛卡尔网格技术生成基于四叉树数据结构的网格,根据莫顿空间填充曲线理论^[7]将其转换为线性数据结构进而开展流场计算,采用 Dadone 和 Grossman^[6]的浸入式边界方法处理固壁边界,并针对自适应笛卡尔网格的特点提出了新的虚拟点反射方法和插值方法,解决了数值吸力峰值问题,进而对 RAE2822 翼型、双 NACA0012 翼型和 Suddhoo 三元翼型开展无黏流动数值模拟,并与现有的理论解、单域以及分区结构网格解进行了对比分析,验证了该方法在复杂几何区域进行流场模拟的有效性和精度.

1 自适应笛卡尔网格的生成

网格质量对流场数值模拟的精度和收敛性都有重要的影响,文献[8]指出,根据波音公司使用 TRANAIR 软件进行流动模拟的经验,基于流场解的特征进行自适应网格调整应成为可靠且易用的计算流体动力学模拟的基础技术.本文首先根据几何特征进行初步自适应生成用于流场计算的初始网格,然后在计算过程中再根据解的信息进行更为精确的自适应网格调整.本文算例中网格的处理时间约是整个数值模拟时间的 1/10,同结构网格和非结构网格方法相比,笛卡尔网格中平均每个网格单元的操作要少很多,数据存储量介于两者之间,因此该方法具有较高的网格生成效

率和计算效率.

1.1 几何自适应

在生成初始的均匀粗网格后,对物面处的切割网格单元及其 2 层邻居网格单元进行加密处理,从而实现从远场粗网格到物面细网格的光滑过渡.一般而言,物面几何的剧烈变化会引起复杂的流动现象,因此需要在大曲率几何点附近如翼型前缘以及几何奇点如翼型尾缘处进行曲率自适应以准确捕捉流动细节.本文中曲率自适应的准则取为 $\max(\Delta x, \Delta y) < \frac{1}{20}R$, 其中 $\Delta x, \Delta y$ 分别为网格的横向和纵向尺度, R 为当地几何曲率半径,尾缘点附近进行 4 次额外的加密处理.

1.2 解自适应

文献[9-11]通过对各种自适应准则的对比研究指出自适应准则的不恰当选取会导致错误的收敛解,一个区域产生的数值误差可能会显著降低另一个区域的求解精度.数值模拟的实践表明:基于 1 阶导数的自适应准则通常能够给出可靠的结果.本文采用了 Darren^[12]提出的基于速度旋度和散度的混合准则

$$\tau_{c_i} = |\nabla \times U| l_i^{r+1}, \tau_{d_i} = |\nabla \cdot U| l_i^{r+1} \quad (1)$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \tau_{c_i}^2}{n}}, \sigma_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \tau_{d_i}^2}{n}} \quad (2)$$

其中 r 为经验参数,本文中取为 2.0, n 为网格量, l_i 为网格尺度, U 为流动速度.网格进行加密或者粗化操作的判定准则为:如果满足条件 $\tau_{c_i} > \sigma_c$ 或 $\tau_{d_i} > \sigma_d$, 则网格加密;如果是 $\tau_{c_i} < \frac{1}{10}\sigma_c$ 且 $\tau_{d_i} < \frac{1}{10}\sigma_d$, 则网格粗化.

1.3 网格光滑

在每次自适应操作完成后,都需要对网格进行光滑处理以保证相邻网格单元层级差不大于 1,固壁和远场边界处网格层级差为 0,同时还要消除“空洞”网格(4 个方向邻居网格均比该网格密)和“山峰”网格(4 个方向邻居网格均比该网格粗),以维持流场的计算精度和边界条件的引入精度.

2 数值计算方法

2.1 控制方程组

二维非定常无量纲 Euler 方程组为

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + \frac{\partial f_m}{\partial x} + \frac{\partial g_m}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} [u_1, u_2, u_3, u_4] &= [\rho, \rho u, \rho v, \rho e] \\ [f_1, f_2, f_3, f_4] &= \\ [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (\rho e + p)u] \\ [g_1, g_2, g_3, g_4] &= \\ [\rho v, \rho vu, \rho v^2 + p, (\rho e + p)v] \end{aligned}$$

式中 p, ρ, e 分别为压力、密度、总能; u, v 分别为 x 方向和 y 方向的速度分量. 无量纲化的特征变量为自由来流的压力 p_∞ , 密度 ρ_∞ , 声速 a_∞ , 特征长度 c 为翼型弦长.

对于理想气体, 有

$$p = \frac{\rho T}{\gamma} \quad (4)$$

单位比能量

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (5)$$

2.2 数值方法

本文使用有限体积法进行计算, 采用 MUSCL (monotone upstream-centered schemes for conservation laws) 插值方法和 Vanleer 限制器以达到空间 2 阶精度, 网格界面数值通量 $f_{1/2}$ 的计算采用 Liou 提出的 AUSM⁺ (advection upstream splitting scheme)-up 格式^[13]

$$Ma_{1/2} = \frac{u_{1/2}}{a_{1/2}} \quad (6)$$

$$\overline{Ma}^2 = \frac{u_1^2 + u_r^2}{2a_{1/2}^2} \quad (7)$$

$$Ma_0^2 = \min[1, \max(\overline{Ma}^2, \overline{Ma}_\infty^2)] \in [0, 1] \quad (8)$$

$$f_a(Ma_0) = Ma_0(2 - Ma_0) \in [0, 1] \quad (9)$$

$$Ma_{1/2} = Ma_{(4)}^+ Ma_1 + Ma_{(4)}^- Ma_r -$$

$$\frac{K_p}{f_a} \max(1 - \sigma \overline{Ma}^2, 0) \frac{p_r - p_1}{\rho_{1/2} a_{1/2}^2} \quad (10)$$

$$\rho_{1/2} = (\rho_1 + \rho_r)/2 \quad (11)$$

$$\dot{m}_{1/2} = a_{1/2} Ma_{1/2} \begin{cases} \rho_1, & \text{若 } Ma_{1/2} > 0 \\ \rho_r, & \text{若 } Ma_{1/2} \leq 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$p_{1/2} = p_{(5)}^+ Ma_1 p_1 + p_{(5)}^- Ma_r p_r -$$

$$K_u p_{(5)}^+ p_{(5)}^- (\rho_1 + \rho_r) (f_a a_{1/2}) (u_r - u_1) \quad (13)$$

$$f_{1/2} = \dot{m}_{1/2} \begin{cases} \Psi_1, & \text{若 } \dot{m}_{1/2} > 0 \\ \Psi_r, & \text{若 } \dot{m}_{1/2} \leq 0 \end{cases} + p_{1/2} \quad (14)$$

其中各个参数设定为

$$\alpha = \frac{3}{16}(-4 + 5f_a^2) \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{16}\right],$$

$$\beta = \frac{1}{8}, K_p = 0.25, K_u = 0.75, \sigma = 1.0$$

时间项的离散采用 Darren^[12] 推荐的具有 2 阶精度且对衰减高频误差优化过的 3 阶 Runge-Kutta 方法

$$\begin{cases} U^{(0)} = U^n \\ U^{(k)} = U^{(0)} + \nu \frac{\alpha_k \Delta t}{A} \text{Res}(U^{(k-1)}) \\ k = 1, 2, 3 \\ U^{n+1} = U^{(3)} \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$\nu = 0.6936, \alpha_1 = 0.1918$$

$$\alpha_2 = 0.4929, \alpha_3 = 1.0$$

2.3 边界条件

本文采用 Dadone 和 Grossman^[6] 提出的虚网格方法 (ghost body-cell method, GBCM) 处理固壁边界, 该方法是一种离散强迫浸入式边界方法, 以网格中心点的位置来区分网格类型, 中心点在流场域内则该网格属于流场网格并参与推进求解, 中心点在固壁内则属于固壁网格且不参与推进求解, 固壁内前两层网格流场变量计算公式如下:

$$\begin{cases} p_S = p_R - \rho_R \left(\frac{\tilde{u}_R^2}{R_C} \right) \Delta n \\ \rho_S = \rho_R \left(\frac{p_S}{p_R} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ \tilde{u}_S^2 = \tilde{u}_R^2 + \left(\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \right) \left(\frac{p_R}{\rho_R} - \frac{p_S}{\rho_S} \right) \\ \tilde{v}_S = -\tilde{v}_R \end{cases} \quad (16)$$

其中 S 为固壁内网格的中心点, R 为 S 关于固壁的反射点. R_c 为当地几何曲率半径, Δn 为 S 点和 R 点之间的距离. p, ρ 分别为压力、密度, $\tilde{u}$ 为沿壁面的切向速度, $\tilde{v}$ 为法向速度.

对于采用分段线段方法描述的翼型, 若采用 S 垂直壁面的方法外推 R 点, 则会引起数值吸力峰值的非物理解问题, 在流场中 Ma 较高的区域这种现象尤为明显, Coirier^[14] 采用分段 3 次样条曲线描述翼型的方法解决了这个问题. 图 1 中等压线展示了在计算 NACA0012 翼型在自由来流 $Ma_\infty = 0.63$, 攻角 $\alpha = 2^\circ$ 流动状况下产生的吸力峰值现象.

本文提出如下的等比插值方法: 如图 2 所示, $ABCD$ 为翼型边界, BB_2 为 $\angle ABC$ 的角平分线, CC_2 为 $\angle BCD$ 的角平分线, B_1C_1 平行于 BC 且过 S 点, 选取 O 点使得 $L_{B_1S}/L_{BO} = L_{C_1S}/L_{CO}$, 延长

SO 至点 R, 使得 $L_{SO} = L_{OR}$. 同 Coirier 的方法相比, 该等比插值方法计算简便, 在使用分段线段的简洁方式表述翼型的前提下也能够有效解决吸力峰值问题.

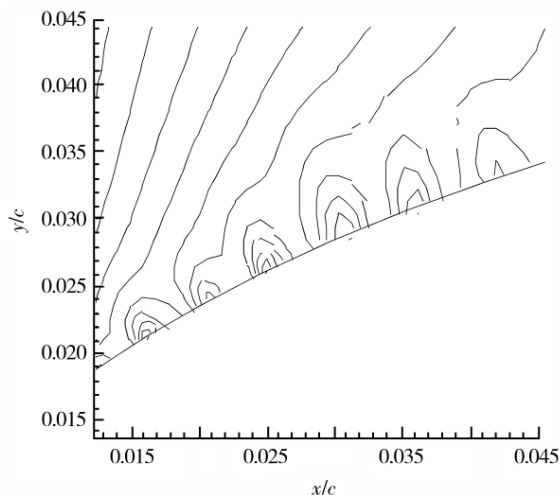


图 1 吸力峰值示意图

Fig. 1 Sketch of suction peak

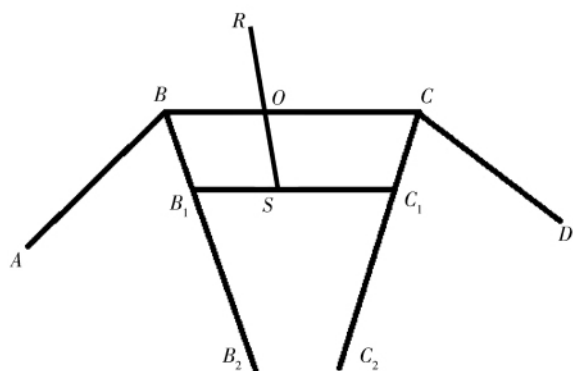


图 2 等比插值示意图

Fig. 2 Sketch of interpolation scheme according to equal ratio

在文献[6]中 R 点的流场变量值根据距其最近的 4 个网格流场变量值双线性插值获得. 因其采用了均匀笛卡尔网格, 双线性插值模板点是固定的, 自适应技术的引入带来了复杂性, 使得这些模板点不固定, 给插值带来了困难. 本文提出如下的线性插值方法来简化 R 点流场变量值的引入

$$\phi_R = (1.0 - C_1 - C_2)\phi_0 + C_1\phi_1 + C_2\phi_2 \quad (17)$$

其中 ϕ 代表守恒变量, 网格 0 为 R 点所位于的网格, 网格 1 和网格 2 由 R 点在网格 0 中所处的位置决定, 如 R 点位于网格 0 的右上区域, 则网格 1 和网格 2 分别取为网格 0 的上方邻居单元和右方邻居单元, 以此类推. 该插值方法根据所选 3 个网格变量值所确定的平面来插值 R 点, 具有 1 阶精

度, 对于不同的网格拓扑都适用, 系数 C_1 和 C_2 计算公式如下:

$$C_1 = \frac{|x_R - x_0|}{2\Delta x_0}, C_2 = \frac{|y_R - y_0|}{2\Delta y_0} \quad (18)$$

其中 x_0, y_0 为网格 0 的中心坐标; x_R, y_R 为 R 点的坐标; $\Delta x_0, \Delta y_0$ 为网格 0 在 x 方向和 y 方向的长度.

计算域外边界采用基于一维流动特征关系式的局部一维 Riemann 不变量方法推出的无反射边界条件, 其补充方式和结构网格中相同, 无需特殊处理, 本文中计算区域为翼型 4 个方向各取 128 倍弦长, 因此无需使用涡修正方法.

3 计算结果分析

初始粗网格量为 16×16 , 对切割网格单元及其邻近的两层网格单元进行加密处理, 然后开展曲率自适应. 在此网格基础上开始计算工作, 在流场解充分收敛时进行解自适应, 然后在新网格上进行计算. 解自适应的次数是问题相关的, 本文中前两个算例解自适应 3 次, 第 3 个算例解自适应 2 次.

3.1 RAE2822 翼型 ($Ma_\infty = 0.75, \alpha = 3.0^\circ$)

AGARD (advisory group for aerospace research and development)^[15] 的计算采用了 320×64 (20480) 的 O 型网格. 本文中自适应笛卡尔网格算法生成的网格如图 3 所示, 翼型前缘、尾缘和激波附近实现了自动加密, 网格单元数量为 19892, 与 AGARD 网格量相当. 从图 4 的表面压力系数分布曲线和图 5 的表面 Mach 数分布曲线可以看

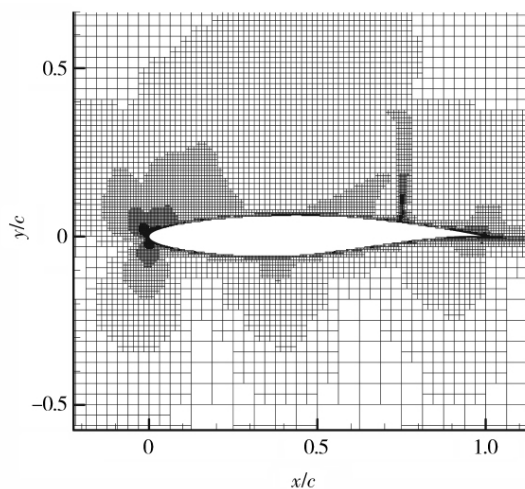


图 3 RAE2822 翼型 3 次解自适应后的网格

Fig. 3 Level 3 solution-based adaptively-refined

mesh of the RAE2822 airfoil
出自适应笛卡尔算法激波捕获位置准确且前后无

震荡,与 AGARD 的结果符合得很好,图 6 为流场的等压线图。

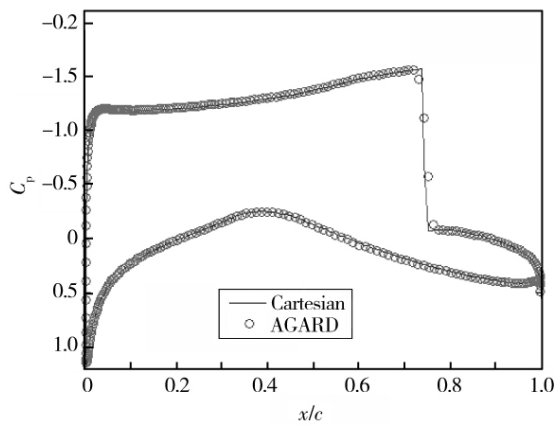


图 4 RAE2822 翼型表面压力系数分布

Fig. 4 Pressure coefficient distributions on the surface of the RAE2822 airfoil

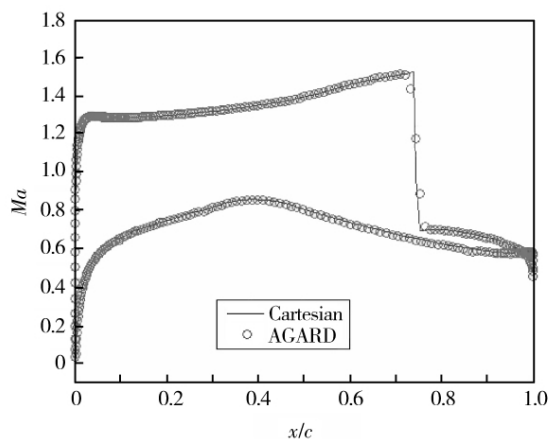


图 5 RAE2822 翼型表面 Mach 数分布

Fig. 5 Mach number distributions on the surface of the RAE2822 airfoil

3.2 双 NACA0012 翼型 ($Ma_{\infty}=0.70, \alpha=0^{\circ}$)

2 个 NACA0012 翼型在 x 方向和 y 方向分别错开 0.5 倍弦长的距离, Lerat 和 Wu^[16] 的计算采用了分区结构网格技术, 网格量为 8340, 分为 5 个区域. 本文中 3 次解自适应后的网格如图 7 所示, 网格量为 26536, 为文献[16]的 3.18 倍. 由图 8 和图 9 的表面压力系数对比图可以看出, 本文计算的强激波陡峭且前后无震荡, 位置准确, 文献[16]的结果稍有震荡, 左下翼型的下表面弱激波捕获准确, 但激波后稍有震荡, 整体符合得很好, 而文献[16]中用于对比的均匀笛卡尔网格结果未能求解出该弱激波, 图 10 为流场的等压线图. 分区结构网格由于其贴体特征, 可以在较少网格量的基础上获得精确的结果, 但是其需要耗费额外

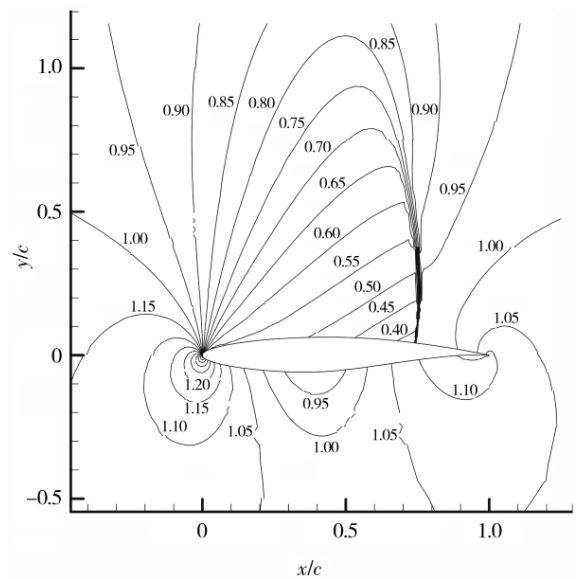


图 6 RAE2822 翼型流场等压线分布

Fig. 6 Pressure contours of flow around the RAE2822 airfoil

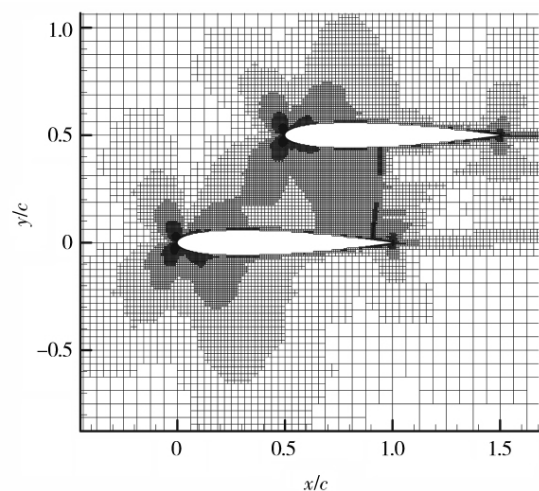


图 7 双 NACA0012 翼型 3 次解自适应后的网格

Fig. 7 Level 3 solution-based adaptively-refined mesh of the double NACA0012 airfoil

的人工工作量进行网格生成工作, 对于复杂几何外形尤为明显, 该工作量能够占到整个 CFD 工作量的 60%, 而自适应笛卡尔网格则能够完全自动生成网格。

3.3 Suddhoo 三元翼 ($Ma_{\infty}=0.20, \alpha=20.0^{\circ}$)

Suddhoo 和 Hall^[17] 通过使用保型变换方法求解位势流方程给出了该问题的理论解. 本文 2 次解自适应后的网格如图 11 所示, 网格量为 32756. 由图 12 的表面压力系数对比曲线和图 13 的流场等压线分布可以看出本文的计算结果从整体上来说与理论解符合得较好, 主翼型前缘点附

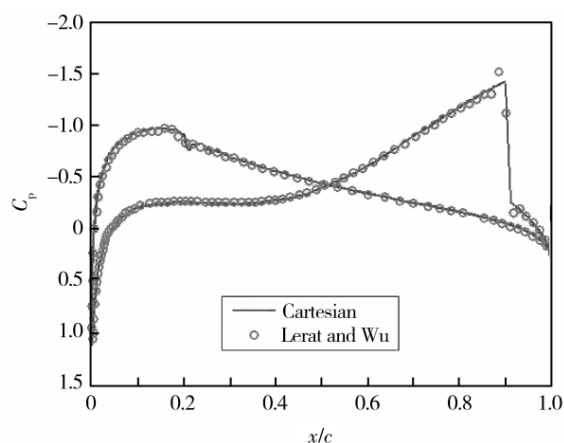


图 8 左下 NACA0012 翼型表面压力系数分布

Fig. 8 Pressure coefficient distributions on the surface of the lower left double NACA0012 airfoil

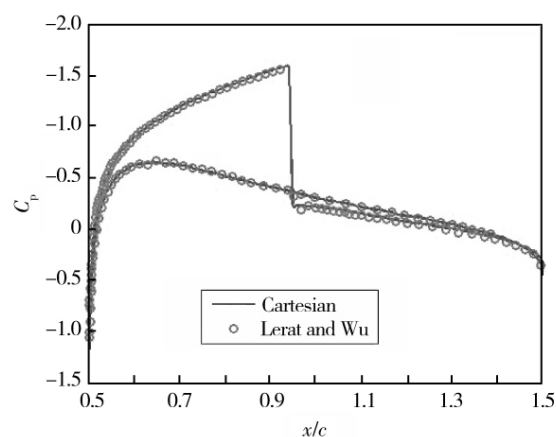


图 9 右上 NACA0012 翼型表面压力系数分布

Fig. 9 Pressure coefficient distributions on the surface of the upper right double NACA0012 airfoil

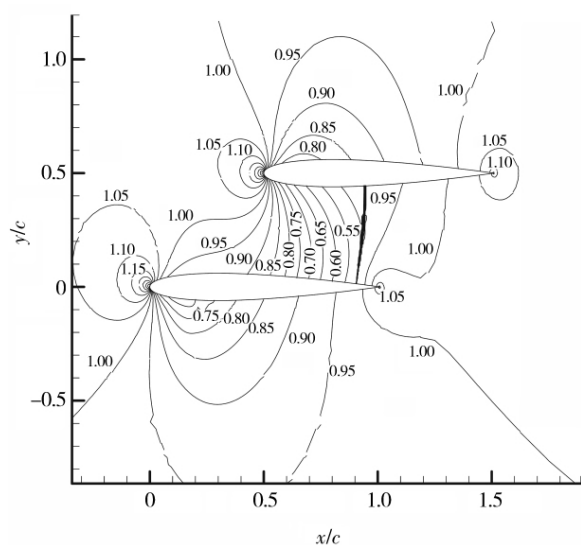


图 10 双 NACA0012 翼型流场等压线分布

Fig. 10 Pressure contours of flow around the double NACA0012 airfoil

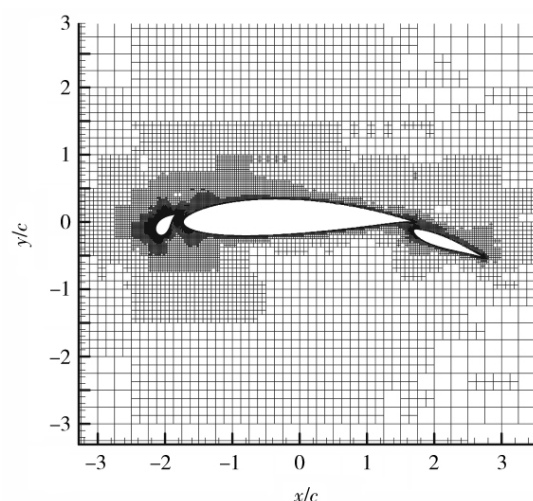


图 11 Suddhoo 三元翼型 2 次解自适应后的网格

Fig. 11 Level 2 solution-based adaptively-refined mesh of the Suddhoo three-element airfoil

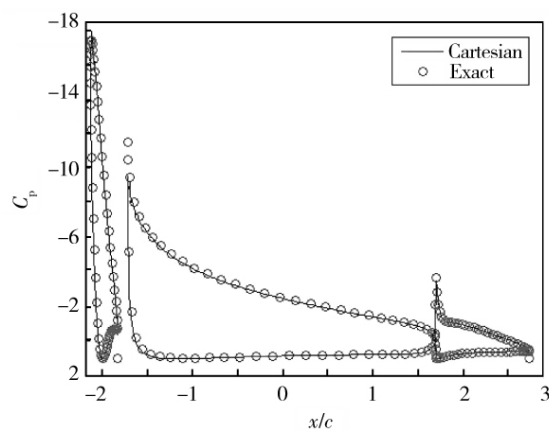


图 12 Suddhoo 三元翼型表面压力系数分布

Fig. 12 Pressure coefficient distributions on the surface of the Suddhoo three-element airfoil

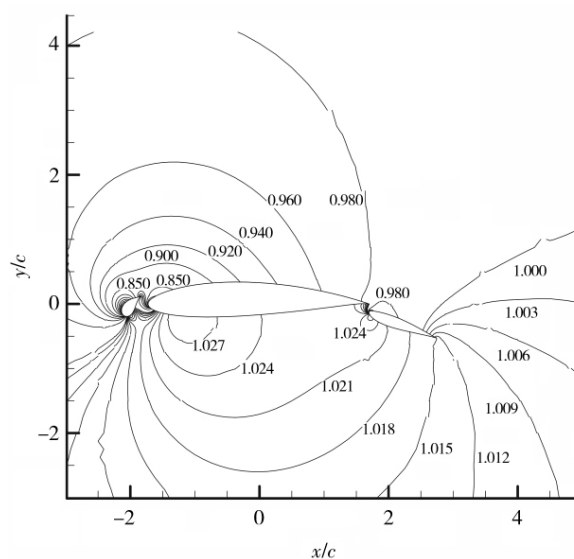


图 13 Suddhoo 三元翼型流场等压线分布

Fig. 13 Pressure contours of flow around the Suddhoo three-element airfoil

近有较大偏离,流场的加速区域和减速区域处的网格都得到了自动加密,进而得到了准确的求解。

4 结论及展望

本文采用了一种离散强迫浸入式边界方法表述固壁边界条件,针对自适应笛卡尔网格的特点提出了新的虚拟点反射方法和插值方法,解决了数值吸力峰值问题。采用有限体积法对多个翼型的不可压以及可压流动状况进行了无黏数值模拟,并与现有的理论结果、单域以及分区结构网格结果进行了对比分析,结果表明:该离散强迫浸入边界方法能够有效引入固壁边界条件,能够同时处理不可压和可压流动状况,结合自适应笛卡尔网格技术能够完成复杂几何区域的自动网格生成工作,并且能够准确地求解无黏流场,在同样的求解精度下,同单域结构网格相比,两者的网格量相当,同分区结构网格相比,自适应笛卡尔网格需要的网格量较大。本文仅对二维翼型绕流进行了分析,对于其它复杂几何区域流动的模拟,该方法同样适用,同时可方便的推广到三维无黏流动的数值模拟中去。黏性边界条件的处理是目前笛卡尔网格方法中的一个难点,该边界条件尚不适用,有待进一步发展。

参考文献:

- [1] Peskin C S. Flow patterns around the heart valves[J]. Journal of Computational Physics, 1972, 10(2): 252-271.
- [2] Beyer R P. A computational model of the cochlea using the immersed boundary method[J]. Journal of Computational Physics, 1992, 98(1): 145-162.
- [3] Saiki E M, Biringen S. Numerical simulation of a cylinder in uniform flow: application of a virtual boundary method [J]. Journal of Computational Physics, 1996, 123(2): 450-465.
- [4] Mohd-Yosuf J. Combined immersed boundary/B-spline methods for simulations of flow in complex geometries [R]. US: CTR Annual Research Briefs, NASA Ames Research/Stanford University, 1997.
- [5] Ghias R, Mittal R, Dong H. A sharp interface immersed boundary method for compressible viscous flows[J]. Journal of Computational Physics, 2007, 225(1): 528-553.
- [6] Dadone A, Grossman B. Ghost-cell method for inviscid two-dimensional flows on Cartesian grids[J]. AIAA Journal, 2004, 42(12): 2499-2507.
- [7] Tomasz P, Timur J L, Vincent G W. Adaptive mesh refinement-theory and applications[M]. New York: Springer, 2005.
- [8] Giuseppe B, Aldo F. Variational analysis and aerospace engineering[M]. New York: Springer, 2009.
- [9] Beger M J, Aftosmis M J. Aspects (and aspect-ratios) of Cartesian mesh methods[C]// Proceedings of 16th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. Heidelberg: Springer-Verlag, 1998: 1-12.
- [10] Warren G, Anderson W K, Thomas J, et al. Grid convergence for adaptive methods [C] // Proceedings of 10th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. Washington D C: AIAA, 1991: 729-741.
- [11] Venditti D A, Darmoral D L. Grid adaption for functional outputs: application to two-dimensional inviscid flows[J]. Journal of Computational Physics, 2002, 176(1): 40-69.
- [12] Darren L D Z. A quadtree-based adaptively-refined Cartesian-grid algorithm for solution of the Euler equations[D]. Michigan: University of Michigan, 1993.
- [13] Liou M S. A sequel to AUSM: part II AUSM⁺-up for all speeds[J]. Journal of Computational Physics, 2006, 214(1): 137-170.
- [14] William J C. An adaptively-refined, Cartesian, cell-based scheme for the Euler and Navier-Stokes equations[D]. Michigan: University of Michigan, 1994.
- [15] Yoshihara H, Sacher P. Test cases for inviscid flow field methods[R]. Advisory Group for Aerospace Research and Development (AGARD)-AR-211, 1985.
- [16] Lerat A, Wu Z N. Stable conservative multidomain treatments for implicit Euler Solvers[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 123(1): 45-64.
- [17] Suddhoo A, Hall I M. Test cases for the plane potential flow past multi-element aerofoils[J]. Aeronautical Journal, 1985, 89(890): 403-414.